ESTRATÉGIAS DE ENSINO QUE PODEM MINIMIZAR AS DIFICULDADES EM CÁLCULO

Júlio César de Carvalho Júnior [1]

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar a importância do cálculo nos dias de hoje passando por sua história, desde a Grécia antiga até o seu ápice com Newton e Leibniz. Sendo esse um importante conteúdo, deve-se preocupar com a qualidade de seu ensino e garantir que os alunos tenham um aprendizado satisfatório, embora muitas dificuldades norteiem seu ensino. Apresentaremos a defasagem matemática no ensino básico, especialmente em álgebra e funções, como sendo uma das principais causas das dificuldades com que os alunos chegam aos cursos de cálculo. Pretendemos, ainda, apresentar algumas possíveis estratégias de ensino para contornar esse problema. Abordaremos também quais as possíveis formas com as quais o uso do computador (*softwares* educacionais para matemática) e a modelagem matemática podem contribuir para minimizar as dificuldades que os alunos possuem no Cálculo Diferencial e Integral.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo, defasagem, computador, softwares e Modelagem Matemática.

ABSTRACT

This study aims to present the importance of Calculation today through its history, from ancient Greece to its apex with Newton and Leibniz. Being an important content should worry about the quality of their teaching and ensure that students have a satisfactory learning, but many difficulties guide their teaching. We present the mathematical gap in basic education, especially in algebra and functions as a major cause of the difficulties that students come to calculus courses. We also intend to present some possible teaching strategies to circumvent this problem. We will also explore what the possible ways in which computer usage

[1] Graduado em Matemática pela Faculdade de Pará de Minas – FAPAM. E-mail: juliocarvalho.matematica@gmail.com

(educational software for mathematics) and mathematical modeling can help to minimize the difficulties that students have in Differential and Integral Calculus.

KEYWORDS: Calculus, lag, computer, software and Mathematical Modeling.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho vem apontar alguns dos problemas que atrapalham os alunos no aprendizado de cálculo, e apresentar algumas possíveis estratégias para a melhoria do ensino-aprendizagem do conteúdo em questão para uma melhoria do rendimento dos alunos nessa disciplina tão importante das ciências exatas.

Hoje em dia, uma grande causa de reprovação de alunos no ensino superior é a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os alunos apresentam muitas dificuldades no aprendizado dessa disciplina, fato que pude observar em minha própria sala de aula. Os professores se dedicam, fazem o possível e o impossível para melhorar o aprendizado da disciplina, porém, nem todos têm acesso a formas e estratégias de ensino diversificadas. O objetivo desta pesquisa é entender as dificuldades dos alunos em Cálculo e apresentar estratégias e recursos que facilitem o ensino desse conteúdo.

O Cálculo Diferencial e Integral se apresenta como um dos tópicos mais importantes dos cursos de nível superior no campo das ciências exatas. Desenvolvido no século XVII para estudar problemas envolvendo o movimento, o cálculo tornou-se uma ferramenta muito importante, não só para a matemática, mas também para diversas áreas como física, química, biologia, medicina, economia, entre outras.

Pela grande importância que tem o cálculo para as ciências exatas, esses altos índices de reprovação têm levado vários pesquisadores – dentre os quais, Miguel (1995), D' Ambrosio (1999) e Baldino (1994) – a investigações sobre o processo de ensino e aprendizagem de cálculo. Existem vários motivos para essas reprovações; as principais pesquisas apontam para o tratamento dado aos conceitos envolvidos e para a prática pedagógica dos professores que ministram esses conteúdos.

A principal dificuldade presente, sobretudo na aprendizagem de cálculo, é oriunda da grande dificuldade dos alunos na interpretação e construção de gráficos, sendo esse um obstáculo de natureza didática, vinda de uma defasagem desses conteúdos na educação básica.

No início do Cálculo, são desenvolvidos dois conceitos básicos: o problema das tangentes (derivada) e o problema das áreas sob curvas (integral). Com uma defasagem em álgebra, funções e na construção e interpretação de gráficos surgem as dificuldades no ensino superior.

Podemos perceber que, hoje em dia, são apresentados métodos e estratégias para facilitar o ensino de cálculo e diminuir as taxas de reprovação. As principais ferramentas que vêm sendo utilizadas para o ensino do cálculo são as ferramentas computacionais e os *softwares* de matemática.

Os *softwares* de matemática possibilitam que o ensino seja feito de maneira inovadora, facilitando o aprendizado de Cálculo. As ferramentas computacionais constituem um método educacional auxiliar que estimula e apoia a aprendizagem.

Como os alunos que temos hoje são muito ligados às tecnologias, o computador traz benefícios para o ensino do Cálculo. O professor pode tirar proveito do uso de tecnologias em sala de aula e deve ser responsável por fazer com que o conhecimento construído por meio das tecnologias tenha significado para o aluno. Utilizando o computador como forma de auxiliar o ensino, o aluno pode ter um maior aprendizado, pois o seu interesse em aprender se torna maior. Assim, é permitido a ele que use sua criatividade e seu raciocínio intensamente durante a aprendizagem e tenha um aprendizado muito eficaz e satisfatório.

Outro método para auxiliar o ensino de cálculo que se apresenta de forma constante nas pesquisas é o uso da modelagem matemática no ensino superior. A modelagem matemática pode ser tratada como um conceito novo na matemática que, hoje em dia, tem sido foco do estudo de diversos pesquisadores. Mas o que é a modelagem? Por que e como fazer modelagem? A modelagem matemática pode ser conceituada como a aplicação da matemática em outras áreas de conhecimento, mas também envolve, dentro da própria matemática, atividades que associam problematização e investigação, em que os alunos são chamados a serem atuantes nas discussões e reflexões.

A modelagem matemática, da mesma forma com que é aplicada nas salas do ensino básico, pode ser aplicada nas salas de aula de Cálculo. Ela envolve o desenvolvimento de diversas cognições e pode ser de grande ajuda no cálculo, principalmente no seu início, onde o aluno deve desenvolver a capacidade de investigar, refletir e buscar uma estratégia para a resolução de um problema. Isso permite que os alunos usem os conhecimentos que já possuem e adquiram novos conhecimentos e habilidades durante as atividades. A modelagem acaba por atuar como um ambiente de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo.

Se o aluno tiver a oportunidade, durante a sua vida acadêmica, de participar ativamente da elaboração e solução de problemas, coletando dados, sugerindo hipóteses, encontrando a solução, este provavelmente conseguirá solucionar os problemas encontrados no setor profissional. Assim, é preciso uma educação que incentive a resolução de problemas, mostrando onde e como se aplica a Matemática.

2 O CÁLCULO E SUA HISTÓRIA

O cálculo é diferente de toda a matemática que já estudamos. Ele trata de uma matemática mais dinâmica; surge da necessidade de se resolver problemas para os quais a álgebra e a trigonometria não foram suficientes para encontrar a resolução. Segundo Swokowski (1994):

> Para estudar objetos que se movem a velocidades constantes e ao longo de trajetórias retilíneas ou circulares, a álgebra e a trigonometria podem ser suficientes; mas, se a velocidade varia ou se a trajetória é irregular, o cálculo torna-se necessário. (SWOKOWSKI, 1994, p.xxv).

Durante o estudo das matérias de cálculo nos cursos superiores, passamos pelo limite; depois, estudamos a derivada com o problema das tangentes e depois estudamos a integração, calculando áreas abaixo de curvas. Mas o interessante é que não foi nessa ordem que ocorreu desenvolvimento do cálculo. Primeiramente, surgiu o cálculo integral e, somente muito tempo depois, surgiu o cálculo diferencial:

> [...] primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2002, p.417).

Hoje, o cálculo é utilizado em muitas áreas do conhecimento, podendo ser tratado como uma das maiores conquistas da matemática moderna. Eves (2002) afirma que "*Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou*".

Quando falamos em cálculo, logo nos vem à cabeça um dos principais personagens de seu desenvolvimento: Isaac Newton (1642 – 1727). Porém, o cálculo começou dois mil anos antes. Boyer (1992) diz que "*Papiros egípcios e tábulas cuneiformes babilônicas incluem problemas de mensuração retilínea e curvilínea que pertencem ao domínio do cálculo".*

Embora a maior parte do desenvolvimento do cálculo tenha acontecido no século XVII, para que a história do desenvolvimento do cálculo possa ser contada de uma maneira eficaz, deve-se voltar à Grécia antiga, onde grandes matemáticos deram grandes contribuições para essa história.

2.1 O Cálculo na Grécia Antiga

As primeiras grandes contribuições de matemáticos para o cálculo começaram a surgir na Grécia Antiga. Um dos primeiros a explorar esse campo foi Zeno (450 a.C.) que, segundo Boyer (1996, p.51), *"enunciou argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade"*. Esses argumentos ficaram conhecidos como Paradoxos de Zeno. Dois desses paradoxos: a Dicotomia e o Aquiles se assemelham com o que hoje conhecemos como Limite. O primeiro paradoxo relata uma situação onde são realizadas subdivisões infinitas regressivas que tendem a zero, mas nunca são zero. O segundo paradoxo apresenta uma soma de subdivisões infinitas progressiva que tendem ao valor de 1, mas nunca chegam no número um.

A partir das argumentações de Zeno, muitos matemáticos surgiram com estudos e descobertas em resposta aos paradoxos de Zeno. Uma das mais significativas contribuições para o cálculo veio através das ideias do grego Eudoxo (370 a.C.), que criou o Método de Exaustão, conhecido como *"o equivalente grego do cálculo integral"*. (Boyer, 1996, p.63). Esse método era enunciado da seguinte forma:

> Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2002, p.419).

A principal aplicação do método de Exaustão é calcular a área do círculo, inscrevendo e circunscrevendo polígonos regulares nesse círculo. À medida que aumentamos o número de lados do polígono, aproximamo-nos da área do círculo. Na ideia de Eudoxo, conhecida a fórmula, o método se torna uma ferramenta para prová-la. A partir dos desenvolvimentos de Eudoxo no método de exaustão, Arquimedes também fez sua contribuição ao desenvolvimento do cálculo.

O método de Equilíbrio desenvolvido por Arquimedes, assim como os primeiros problemas do cálculo, *"diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de* *arcos".* (EVES, 2002, p.418). O método de Equilíbrio de Arquimedes foi descoberto em um pergaminho perdido que seria enviado a Eratóstenes. O método de Arquimedes tinha a seguinte ideia fundamental para determinar áreas e volumes:

> Corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2002, p.422).

Com esse método, Arquimedes descobriu a fórmula do volume da esfera. Depois de Arquimedes, as teorias ligadas ao cálculo ficaram estagnadas. Só em torno do ano 1450, os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa. Assim, iniciaram-se vários estudos relacionados ao Cálculo, desenvolvendo uma das descobertas mais relevantes na matemática.

2.2 O cálculo na Europa no Século XVII

No início do século XVII, as ideias pioneiras de Eudoxo e Arquimedes começaram a ser superadas. Nesse início, Luca Valério (1552-1618) e Simon Stevin (1548-1620) fizeram suas contribuições; segundo Eves (2002, p.424), *"ambos tentaram evitar a dupla reductio ad absurdum do Método da Exaustão fazendo uma passagem direta ao limite".*

Johannes Kepler (1571-1630) realizou trabalhos relacionados a cálculo de infinitésimos e integração. *"Kepler teve de recorrer a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário".* (EVES, 2002, p.424).

Outro matemático importante foi Boaventura Cavalieri (1598-1647), aluno de Galileu e professor na Universidade de Bolonha. Cavalieri *"deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia. Em grande parte foi o responsável pela introdução, logo, dos logaritmos na Europa."* (EVES, 2002, p.425). Em 1635, Cavalieri publicou o tratado *Geometria Indivisibilibus,* que foi sua grande contribuição à matemática. Nesse trabalho, encontra-se o Método dos Indivisíveis de Cavalieri, usado no cálculo de áreas e volumes.

A primeira manifestação clara do método de diferenciação ocorreu em 1629, com Pierre de Fermat (1601-1665). Esse método equivale a calcular usando a definição de derivada por limite: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$. Fermat também descobriu um procedimento para encontrar a tangente de uma curva e como calcular áreas sob as curvas, iguais às ideias de Cavalieri. Boyer (1996) afirma que Fermat usou fórmulas de somas de potências dos inteiros para encontrar os resultados para todos os valores inteiros positivos.

Antes de chegar a Newton, dois matemáticos que foram muito influentes para ele foram os ingleses John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677).

Wallis foi o *"foi o principal matemático inglês antes de Newton"* (BOYER, 1996, p.263), e fez muitas contribuições à análise infinitesimal e, na integração, sistematizou e estendeu os métodos de Cavalieri.

Se John Wallis se destacou na integração, Isaac Barrow deu contribuições ao campo da diferenciação. Barrow foi professor de Newton e seu antecessor a ocupar uma cátedra em Cambridge. Barrow publicou duas importantes obras: *Lectiones Opticae* (1669) e *Lectiones Geometriae* (1670). Este último abordava problemas sobre tangentes e quadraturas: *"Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e integração são operações inversas uma da outra"*. (EVES, 2002, p.435). Essa descoberta foi provada e enunciada nas *Lectiones* de Barrow e, mais tarde, melhor estudada por Newton e Leibniz, ficando conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo.

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral encontrava-se bastante avançado. Faltava somente um simbolismo geral e regras analíticas formais para consolidar todas as descobertas. Nesse momento, surgiram dois dos maiores matemáticos da história, aos quais é atribuída a invenção do cálculo: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibiniz.

2.3 A criação do Cálculo: Newton e Leibniz

Newton e Leibniz não inventaram o Cálculo sozinhos. No século XVII, dois problemas intrigavam os matemáticos:

> [...] em primeiro lugar, o problema das tangentes: determinar as retas tangentes a uma curva dada, o problema fundamental do cálculo diferencial. Em segundo lugar, o problema da quadratura: determinar a área dentro de uma curva dada, o problema fundamental do cálculo integral". (COURANT, 2000, p.481).

A criação do cálculo é dada a Newton e Leibniz por terem sido os pioneiros na descoberta da ligação desses dois problemas.

Isaac Newton (1643-1727) nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia de natal de 1642, no mesmo ano da morte de Galileu. Aos 18 anos de idade, Newton ingressou no Trinity College em Cambridge, em 1661, e não pensava em ser matemático; a química era seu principal interesse. Mas, no seu primeiro ano de estudos, a matemática chamou sua atenção:

> No início de seu primeiro ano, ele comprou e estudou um exemplar de Euclides, e logo depois leu a *Clavis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Des Cartes* de Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète, e o que talvez tenha sido o mais importante de todos para ele, *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Além disso, a esse estudo devemos acrescentar as aulas que Barrow deu como "*Lucasian professor",* e a que Newton assistiu depois de 1663. Também veio a conhecer as obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros. (BOYER, 1996, p.269).

Assim, em 1664, Newton iniciou suas próprias contribuições à matemática. Entre elas, podemos citar o Teorema Binomial, as Séries Infinitas e o Método de Fluxos. O trabalho de Newton sobre séries infinitas foi um primeiro esboço de sua principal descoberta – o Cálculo. Em seu livro *De Analysi,* por meio da análise de séries infinitas, Newton descobriu a relação existente entre a inclinação de uma curva e a área abaixo dela.

> Parece ser essa a primeira vez na história da matemática que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos de diferenciação embora a possibilidade de usar tal processo evidentemente fosse conhecida por Barrow e Gregory, e talvez por Torricelli e Fermat. Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita. Por isso é que, mais tarde, ele viu com maus olhos a tentativa de separar cálculo de sua análise por séries infinitas. (BOYER, 1996, p.273).

O atual cálculo diferencial era o método de fluxos de Newton. A uma quantidade variável, ele dava o nome de fluente e, à sua taxa de variação, dava o nome de fluxo do fluente. Esse método trabalhava tanto com diferenciação quanto com integração, como diz Eves (2002):

> Newton considerou dois tipos de problemas. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma relação envolvendo estes fluentes e seus fluxos; isso é equivalente, como é claro, à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, pretende-se achar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Trata-se do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial. (EVES, 2002, p.439).

Aplicando este método, Newton conseguiu determinar máximos e mínimos de curvas, tangentes, curvaturas, concavidades e quadraturas. Newton é considerado o criador do cálculo por ter relacionado a integração com a diferenciação e criar uma linguagem geral do cálculo.

> Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas sejam transcendentes. (BOYER, 1996, p. 274).

A criação do cálculo também é creditada ao matemático alemão, nascido em Leipzig, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Seu contato com a matemática foi mais intenso quando conheceu e passou a ter aulas com Christiaan Huygens (1629-1695), quando tomou conhecimento das obras de Barrow e da primeira versão do cálculo de Newton. Leibniz trabalhou com séries infinitas, criando o Triângulo Harmônico. Também descobriu a relação existente entre integração e diferenciação no ano de 1673:

> Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam das somas dos retângulos infinitamente finos que formam a área. Como nos triângulos aritmético e harmônico os processos de tomar somas ou diferenças estão em relação oposta, também na geometria os problemas de quadraturas e tangentes, depende de somas e diferenças respectivamente, são inversos um do outro. (BOYER, 1996, p.276 - 277).

Foi Leibniz que introduziu as notações dy e dx e o símbolo $\int$ no cálculo. Por ele, foram deduzidas muitas regras de diferenciação que alunos aprendem hoje em dia nos cursos de Cálculo.

> Depois de algumas tentativas ele se fixou em *dx* e *dy* para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y, embora inicialmente usasse *x/d* e *y/d* para indicar o abaixamento de grau. A principio ele escrevia simplesmente omn.y (ou "todos os y") para a soma das ordenadas sob uma curva, mas mais tarde ele usou o símbolo $\int$y e ainda mais tarde $\int$y *dx*, o sinal de integral sendo uma letra s (para soma) aumentada. Achar tangentes exigia o uso do *calculus differentialis* e achar quadraturas o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, frases de onde resultaram as expressões que usamos.(BOYER, 1996, p.277).

Após os imensuráveis avanços produzidos por Newton e Leibniz, os matemáticos dos séculos seguintes se concentraram no desenvolvimento e na descoberta de aplicações para o cálculo. Os mais notáveis foram: A família Bernoulli, especialmente Johann Bernoulli (1667-1748); Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), conhecida por ter escrito o primeiro livro que continha, simultaneamente, Cálculo Diferencial e Integral; Leonhard Euler (1707–1827); Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827); Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin Louis Cauchy (1789-1857); Karl Weierstrass (1815-1897) e Georg Riemman (1826-1866), entre outros.

Podemos ver que o cálculo não surgiu pronto e acabado; teve um longo desenvolvimento que se estende até hoje. As aplicações descobertas após o século XVII tornaram o cálculo indispensável na vida moderna. Os conhecimentos adquiridos por meio do cálculo nos capacitam a analisar e resolver diversos problemas. Devido a sua importância, devemos nos preocupar com a aprendizagem desse conteúdo, com as dificuldades e metodologias para seu ensino, além de pensar estratégias para melhorar a aprendizagem do Cálculo.

3 CAUSAS DAS DIFICULDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO

O cálculo é conteúdo presente na maioria dos cursos superiores da área de Exatas e de Tecnologia. Então, torna-se de suma importância entender o seu ensino e também as dificuldades relacionadas a ele. O que preocupa é que, em grande parte dos cursos que têm a disciplina Cálculo, a reprovação é muito grande.

> [...] ela apresenta alto índice de reprovação, fenômeno observado em muitas universidades e considerado, por alguns autores – dentre os quais Miguel (1995), D' Ambrosio (1999) e Baldino (1994) – como uma triste e perversa tradição da área tecnológica". (LACHINI, 2001, p.149).

Assim também ocorre no Brasil, onde o cálculo é um causador de evasão de alunos das universidades. Meyer e Souza Júnior (2002), afirmam:

> No Brasil, o ensino do Cálculo tem sido responsabilizado por um grande número de reprovações e de evasões de estudantes universitários. É comum em nossas universidades a reclamação, por parte dos alunos ou por parte dos professores de outras áreas, da inexistência de esforços para tornar o Cálculo interessante ou útil. (MEYER e SOUZA JÚNIOR, 2002, p.121).

Esses altos índices de reprovação têm levado vários pesquisadores a investigações sobre o processo de ensino e aprendizagem do cálculo. Existem vários motivos para esse alto número de reprovações e evasões. As principais pesquisas apontam para o tratamento dado aos conceitos do cálculo e para a prática pedagógica dos professores ao ministrarem esse conteúdo. Barreto (1995) [2] citado por Reis (2001) diz que:

> O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (BARRETO *apud* REIS, 2001, p. 20).

Em geral, é dado ao cálculo um tratamento baseado apenas nas técnicas de resolução de exercícios, não levando o aluno a tentar entender o que faz, mas somente a repetir o algoritmo. Isso torna as aulas maçantes, fazendo com que os alunos percam o interesse pela matéria por não enxergarem seu significado e suas aplicações futuras.

O principal problema para o aluno, no início do estudo universitário, inclusive do cálculo, é a grande mudança da rotina escolar com a qual estavam acostumados. Nos ensinos

---

[2] BARRETO, A. **O Ensino de Cálculo I nas Universidades**. Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM (6) 4-5, 1995.

fundamental e médio, os alunos não são estimulados a raciocinar, são acostumados a resolver as atividades de forma mecânica, decorando regras e fórmulas. NASSER (2007) fala que, no início do curso superior, os alunos se deparam com exigências que não estão prontos para enfrentar, pois não desenvolveram nos ensinos anteriores as habilidades de argumentação.

O trabalho desenvolvido nas salas de aula do ensino básico não desenvolve nos alunos as capacidades de expressar ideias e de justificar os procedimentos usados na resolução de exercícios. Eles não são familiarizados com raciocínio lógico e com as demonstrações. O uso de demonstrações no ensino básico seria fundamental para um maior desenvolvimento do raciocínio do aluno e de sua habilidade matemática.

> A demonstração assume vários papéis na matemática. Alguns desses papéis são mais relevantes à aprendizagem dessa disciplina: verificação (em relação à veracidade de uma afirmativa), explicação (clareando porque a afirmativa é verdadeira), sistematização, descoberta e comunicação. (NASSER, 2007, p.4).

Outro problema muito grave que dificulta o ensino de cálculo, principalmente no Brasil, é a defasagem que os alunos possuem em matemática, trazida dos ensinos fundamental e médio. Muitos alunos saem do ensino médio sem saber conceitos básicos de matemática – na grande maioria, aqueles relacionados ao cálculo como a álgebra, as funções e seus gráficos.

3.1 Defasagem matemática no ensino básico

Para se entender cálculo, é necessário que os alunos tenham um bom conhecimento de conteúdos fundamentais de álgebra e de funções. Então, o aluno deve ter uma base matemática bem sólida, fundamentada, desde os primeiros anos do ensino fundamental, quando se inicia o estudo da álgebra. Isso não ocorre no ensino da matemática em nossas escolas tanto quanto deveria, fazendo com que os alunos cheguem ao ensino superior com uma enorme defasagem matemática. Reis (2001), citando Barreto (1995), mostra que as causas das dificuldades surgem ainda no ensino básico:

> As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante inseguros. (BARRETO *apud* REIS, 2001, p. 21).

Podemos, assim, perceber que a construção da base de conceitos fundamentais de matemática dos alunos para o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral inicia-se ainda no 1º grau. Caso essa base não seja construída no ensino fundamental, os alunos levarão dificuldades para o ensino médio, agravando ainda mais o problema. Assim, os alunos não irão recuperar a aprendizagem que foi perdida, e também não aprenderão os novos conceitos do ensino médio, principalmente os conceitos de função.

A metodologia de estudo corrente consiste, basicamente, da cópia do quadro negro e do livro didático e da repetição dos exercícios resolvidos em aula, cujas soluções são decoradas e reproduzidas nas provas. Essa metodologia é incompatível com o ensino na universidade; ela acaba prejudicando o desempenho do aluno em todas as demais disciplinas do curso universitário devido a um adestramento recebido durante o ensino fundamental e o médio por meio desse processo equivocado. Sobre a metodologia do ensino da matemática, FROTA (2001) considera:

> Parece haver consenso que o ensino da matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz à aprendizagem de procedimentos e não incentiva ao conhecimento matemático relacional que leva o indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados. (FROTA, 2001, p.91).

Essa defasagem prejudica a educação brasileira em qualquer nível em que ela apareça. A defasagem em álgebra atrapalha os alunos nos primeiros semestres dos cursos superiores da área de Exatas. Veremos como essa defasagem pode causar dificuldades no aprendizado do cálculo.

3.1.1 Defasagem em álgebra: um problema para a aprendizagem de cálculo

A álgebra é a base para que os estudantes construam toda a matemática que será aprendida nos níveis seguintes de ensino. Mas assim como os outros campos da Matemática, sua aprendizagem apresenta dificuldades. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática:

> a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à álgebra raramente atingem um índice de 40% de acerto em muitas regiões do país. (BRASIL, 1998, p.115-116).

Podemos perceber que os alunos de nossas escolas apresentam muitas dificuldades de entender os conceitos que fazem parte do estudo da álgebra. Existem erros que se repetem e persistem de um ano para outro. Esses conceitos que envolvem a álgebra são enfatizados na 7ª série do Ensino Fundamental e serão utilizados até o final do Ensino Médio, servindo de base para estudos da matemática do ensino superior. Segundo Marquis (1995):

> [...] os professores sabem que conceitos e manipulações causarão dificuldades nos alunos. Ano após ano, nesta ou naquela classe, os alunos muitas vezes cometem os mesmos erros algébricos, reiteradamente. Em cursos mais avançados de matemática, erros comuns podem atrapalhar o domínio de novos conceitos. (MARQUIS, 1995, p. 234).

A visão tradicional da álgebra se relaciona à aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a álgebra tem sido para os alunos um conjunto de procedimentos sem aplicação na vida cotidiana e que não tem relação com qualquer outro conhecimento matemático. Essa visão da álgebra não desenvolve a compreensão e o raciocínio matemático. Esse tipo de ensino não dá aos alunos a oportunidade de refletirem sobre aquilo que é estudado, impedindo-os de terem suas próprias experiências – eles apenas memorizam procedimentos de resolução e resolvem problemas artificiais desprovidos de significado. Becher e Groenwald (2010) concluem que:

> [...] é lamentável que os estudantes, muitas vezes, se afastem da matemática por não compreenderem o significado dos conteúdos estudados, deixando de desenvolver competências e habilidades ligadas ao simbolismo algébrico, sem o qual não existiria a matemática superior nem a Ciência como a conhecemos. (Becher e Groenwald, 2010, p.245).

Os PCNs afirmam que, para a aprendizagem da álgebra ser significativa:

> [...] é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado de algum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer que a ideia de conhecer assemelha-se à ideia de tecer uma teia. (BRASIL, 1998, p. 75).

Podemos perceber que não é bem isso o que acontece em nossas escolas. Hoje, a defasagem dos alunos do ensino fundamental é gritante, e o cenário que se apresenta na educação é de que esse problema ainda demorará a ter uma resolução. Para que essa defasagem não seja um problema para o aprendizado do cálculo, é necessário que sejam apresentadas estratégias, tanto no ensino médio quanto no superior, para sanar as dificuldades desses estudantes. O próximo capítulo apresenta estratégias para melhorar o aprendizado dos alunos na álgebra, em funções e principalmente no Cálculo Diferencial e Integral.

4 ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DE CÁLCULO: INFORMÁTICA E MODELAGEM MATEMÁTICA

4.1 A informática na educação matemática

O uso da informática vem adquirindo cada vez mais relevância no cenário educacional e é um assunto que vem sendo muito discutido atualmente. Sua utilização como instrumento de aprendizagem e sua ação no meio social vem aumentando de forma rápida entre nós. Hoje em dia, a informática se tornou um objeto essencial para quem busca espaço na sociedade moderna em que vivemos. É evidente a introdução de computadores nas instituições de ensino. Os alunos, desde os estudos iniciais, devem manter contato com as máquinas computadorizadas, tanto no âmbito do entretenimento quanto no desenvolvimento de atividades, desde que as ações pedagógicas estejam relacionadas a situações de experimento, interpretação, indução, visualização, demonstração e generalização. Segundo Borba e Penteado (2005):

> O acesso à Informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares, o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a Informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania. (BORBA e PENTEADO, 2005, p. 17).

Segundo Cysneiro (2006), o papel da informática como ferramenta educativa tem crescido de forma significativa nos últimos anos, e a Informática na Educação é, hoje, uma das áreas mais fortes da Tecnologia Educacional. A informática, quando utilizada corretamente, pode se tornar uma grande ferramenta para difusão do conhecimento e da aprendizagem. Segundo os PCNs, podemos considerar que:

> Tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros. (BRASIL, 1998, p.44).

O uso da informática possibilita também a criação de uma nova relação entre professores e alunos, que contribui para o ensino-aprendizagem. De acordo com os PCNs:

> As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional. Portanto, longe da ideia de que o computador viria substituir o professor, seu uso vem, sobretudo, reforçar o papel do professor na preparação, condução e avaliação do processo de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 1998, p.44).

A utilização da informática (*softwares*) na educação matemática acaba se tornando um recurso que facilita a aprendizagem, pois permite ao estudante utilizar uma ferramenta que oferece uma grande facilidade e também uma grande flexibilidade na construção de modelos matemáticos, permitindo desenvolver melhor a sua criatividade e seu raciocínio. Além disso, o uso de softwares na matemática permite a troca de experiências entre grupos de alunos, tornando mais simples e eficaz o processo de aprendizagem, e ainda pode possibilitar a construção do conhecimento de forma autônoma. Os ambientes gráficos facilitam a percepção e a construção do conhecimento. Porém, segundo Campos (2009):

> A escolha de uma ferramenta computacional adequada deve levar em consideração a facilidade de tornar o ensino do conteúdo de uma forma mais prática, visando motivar o aluno a se interessar pela aula, possibilitando que o mesmo se auto desenvolva na busca da solução de problemas matemáticos, uma aula dinâmica é essencial para melhorar o desempenho do aluno, a fixação de conceitos é mais eficiente. (CAMPOS, 2009, p. 3).

Conforme podemos notar, o uso da informática é de suma importância para o desenvolvimento de diversas atividades cognitivas. Seu uso é importante em todas as áreas de atuação da matemática. Assim, a informática também pode ser de grande ajuda na graduação, especificamente no Cálculo Diferencial e Integral. No próximo tópico, trataremos dos benefícios do uso do computador e de *softwares* educacionais no ensino superior, nas disciplinas de cálculo integral e diferencial.

4.2 Uso da Informática no Cálculo

O uso de informática nos dias de hoje é de uma importância imensurável em todas as áreas da matemática, inclusive na graduação – nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral. A aplicação da informática possibilita transformar a sala de aula num ambiente de trabalho do aluno e do professor, não tendo o conhecimento centrado apenas no docente. Segundo Laudares e Lachini (2001):

> A implementação do uso do computador no estudo de cálculo criaria condições propícias para que cada professor pudesse reavaliar sua competência docente e se considerasse não apenas como repassador do conhecimento pronto, mas se descobrisse, a partir do uso da informática e, em especial, do computador, como reelaborador de saberes. (LAUDARES E LACHINI, 2001, p.75).

O computador e as tecnologias trazem grandes benefícios para o ensino do Cálculo, escolhendo bons *softwares* e aplicando a metodologia adequada. O professor pode tirar proveito das características positivas do computador, como a construção de gráficos e rapidez nos cálculos. Com a utilização correta do computador, o aprendizado de Cálculo se torna mais prazeroso e desafiador. A geração de alunos que temos hoje é muito ligada às tecnologias; assim, usando o computador como método de ensino, o aluno, segundo De Campos (2009): *"sente-se mais motivado pelas aulas, e fixa os conceitos mais rápido do que os métodos convencionai*s". Ainda segundo Campos (2009):

> As aulas teórico-práticas são mais agradáveis e o aluno desperta mais para o conteúdo que está sendo ministrado. Além disso, participa mais da aula, por meio de dúvidas. Aplicação do cálculo a outras áreas faz com que o aluno se sinta mais à vontade, ás (sic) dúvidas "Onde vou aplicar esse conhecimento?" desaparecem. (CAMPOS, 2009, p. 2).

A utilização correta de *softwares* educacionais se torna um grande facilitador, pois permite ao aluno usar sua criatividade e seu raciocínio no ato de aprender. Permite também a troca de ideias e experiências, tornando o aprendizado de cálculo cada vez mais simples. A escolha de um *software* deve ter a função de tornar a aprendizagem mais simples e prática, visando motivar os alunos para que estes tenham um aprendizado com excelência. O professor deve saber utilizar o computador em suas aulas; ele deve tomar para si a responsabilidade de fazer com que o conhecimento construído por meio do uso de uma ferramenta computacional se torne significativo para o aluno. Sobre isso, Meyer e Souza Júnior (2002, p.118) destacam que: "*a presença do computador nessas situações pode* *contribuir decisivamente para a criação de novos saberes e está proporcionando novas possibilidades de trabalho e novas responsabilidades para o professor”.* Por meio do desenvolvimento das disciplinas de cálculo com computador, o aluno pode fixar melhor os conceitos, exercitar o raciocínio lógico e a capacidade de abstração na representação dos problemas de cálculo.

Dentre as ferramentas computacionais que podem ser utilizadas para se resolver problemas, existem aquelas puramente numéricas, que utilizam algoritmos bem conhecidos para encontrar soluções de equações, e existem aquelas algébricas. Na área de Cálculo, podemos encontrar *softwares* gráficos que facilitam a aprendizagem. Entre os *softwares* mais utilizados estão os mencionados abaixo.

O **GeoGebra** é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface gráfica. É um *software* livre que permite com que os alunos realizem construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos. Também permite inserir funções e alterar todos esses objetos de forma dinâmica, após a construção pronta. O GeoGebra é altamente aplicável ao cálculo, pois nele é possível trabalhar com derivação e integração de funções, e disponibilizar comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. É um programa completo, pois reúne, desde as ferramentas tradicionais de geometria, até outras mais elaboradas para a álgebra e o cálculo.

O **Graphmatica** é um aplicativo que possibilita diversas aplicações na matemática. Ele trabalha com duas dimensões, sendo capaz de representar graficamente funções polinomiais de qualquer grau, funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas. Também é útil no Cálculo Diferencial e Integral: colore áreas para ilustrar integrais, desenha gráficos de derivadas e cria gráficos de equações diferenciais ordinárias.

O **Winplot é** programa gráfico que permite traçar e animar gráficos em 2D e 3D, por meio de vários tipos de equações (explicitas, implícitas, paramétricas, entre outras).

O **Maple** é um sistema de álgebra computacional comercial de uso genérico. Constitui-se de um ambiente computacional para computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos 2D e 3D. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo grupo de computação simbólica na universidade de Warteloo no Canadá.

O **MuPAD** é um sistema de computação algébrica (C.A.S. – Computer Algebra System) interativo. Desenvolvido a partir de 1990, ele é um *software* que apresenta todos os recursos dos principais *softwares* comerciais nesta área, o Maple. Pode ser usado no cálculo de limites, derivadas e integrais.

Por meio do desenvolvimento das disciplinas de cálculo com computador, o aluno pode fixar melhor os conceitos, exercitar o raciocínio lógico e a capacidade de abstração na representação dos problemas de cálculo, facilitando a aprendizagem. A utilização de tecnologias da informação em suas diferentes formas, principalmente as de *softwares* computacionais, associadas a uma metodologia de ensino, pode trazer uma excelente colaboração para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na sala de aula, uma vez que facilitam a visualização gráfica, o cálculo, a descoberta de propriedades, a modelagem e a busca de resposta para problemas.

Assim, o aluno terá em suas mãos um conjunto de ferramentas para facilitar o trabalho em atividades investigativas. Os computadores nos fornecem ferramentas importantes para o uso da modelagem matemática. O próximo tópico deste capítulo irá discorrer sobre o que é a modelagem matemática, como pode ser aplicada no ensino e aprendizagem de cálculo e como a informática pode facilitar o uso da modelagem.

4.2 Modelagem Matemática

4.2.1 Modelo Matemático

Modelo matemático pode ser considerado como uma representação ou interpretação simples da realidade. Na matemática, pode ser considerado como um método de usar a matemática para resolver situações do cotidiano, sejam elas simples ou mais elaboradas. Segundo Biembengut e Hein (2003), temos que:

> [...] a resolução de um problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 12).

A matemática, com todas as suas estruturas, permite a elaboração de modelos que possa possibilitar uma maior compreensão, previsão ou simulação de uma situação-problema estudada.

Os modelos podem ser formulados utilizando expressões numéricas, fórmulas, diagramas, gráficos, representações geométricas, equações algébricas e programas computacionais. Pode ser aplicado em qualquer nível no ensino de matemática, desde o fundamental até a pós-graduação, para obtermos uma visão mais simplificada e eficiente de situações pesquisadas.

4.2.2 Modelagem Matemática

A modelagem matemática pode ser entendida como um processo usado com a intenção de relacionar o aspecto científico da matemática a situações da nossa realidade. Para se trabalhar com a modelagem, não basta apenas ter um bom conhecimento da matemática. Além disso, é essencial que o modelador tenha uma boa intuição, muita criatividade para poder transformar as situações reais em modelos eficientes e saber escolher qual o melhor conteúdo da matemática irá se aplicar ao modelo construído. Biembengut e Hein (2003) dão a seguinte definição:

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado como um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 12).

A modelagem é um processo trabalhoso, que envolve muita dedicação e conhecimento por parte dos professores e também dos alunos, mas que, quando bem aplicado, pode dar grandes contribuições para o desenvolvimento das habilidades matemáticas e de outras habilidades cognitivas dos alunos.

Alguns autores consideram a modelagem matemática como uma forma de levar a matemática para dentro de outras áreas do conhecimento alheias à matemática. A modelagem é, de acordo com D'Ambrosio (1986) um processo muito rico para encarar situações reais, e culmina com a resolução efetiva do problema que, na maioria das vezes, não é matemático e nem a resolução de um problema artificial. Além de ser usada como a aplicação da matemática em outras áreas de conhecimento, a modelagem envolve, dentro da própria matemática, atividades que associam problematização e investigação, onde os alunos são chamados a serem atuantes nas discussões e reflexões:

> O ambiente de modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. (BARBOSA, 2004, p. 75).

As atividades de modelagem devem fazer com que os alunos formulem questões, busquem, organizem e abordem os dados matematicamente e tracem estratégias de resolução para os problemas. Assim, os alunos usam os conhecimentos que já possuem e adquirem novos conhecimentos e novas habilidades durante as atividades. A modelagem acaba por atuar como um ambiente de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo. *"Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade."* (BARBOSA, 2004, p. 75).

Podemos assim, inferir que a modelagem matemática proporciona ao aluno não somente um ganho no aprendizado de matemática, mas também um desenvolvimento cognitivo que poderá ser usado em muitas outras áreas do conhecimento e de sua vida fora do ambiente escolar.

A modelagem matemática pode participar da aprendizagem de matemática nos diversos níveis de ensino. Ligando-a ao Cálculo, podemos dizer que a modelagem pode contribuir sendo aplicada para resolver a defasagem no ensino de álgebra e funções, problema visto no capítulo 2, podendo ser aplicada no ensino médio como também no ensino superior, diminuindo as dificuldades no aprendizado.

Para reduzir as dificuldades dos alunos em funções e fazer com que eles cheguem ao ensino superior preparados para o Cálculo, podemos apresentar um plano de trabalho para o ensino de funções que irá motivar o aluno e o auxiliar na aprendizagem. Baseando nas ideias de Maria Eli Puga Beltrão e Sônia Barbosa Camargo Igliori no artigo "Modelagem matemática e aplicações: Abordagens para o ensino de funções", podemos dividir o plano de trabalho em três etapas ou fases. Numa primeira fase da aplicação da modelagem em funções, podemos construir, juntamente com os alunos, os conceitos de função e mostrar aplicações e exemplos de modelos já elaborados dentro desse conteúdo para que o aluno vá se habituando ao processo de modelagem. Nessa fase, é que podemos saber as dificuldades dos alunos:

> [...] é possível detectar dificuldades na leitura de gráficos, na resolução de equações simples, nas regras de sinais e na formulação de expressões, dificuldades essas apontadas na atividade diagnóstica [...]. Nossa atitude é de retorno a esses conteúdos a cada momento, principalmente porque consideramos que esses conhecimentos prévios são fundamentais para a implementação da Modelagem ou Aplicações como estratégias de ensino. (BELTRÃO e IGLIORI, 2010, p. 26).

Na segunda fase, é o momento em que colocamos os alunos no processo de construção dos modelos matemáticos e de suas aplicações. Nessa fase, é tarefa dos alunos a busca por exemplos de problemas que envolvam o uso da modelagem matemática e, com a ajuda do professor, poder aliar esse problema a um tema específico da matemática. É aqui que o aluno começará a ligar problemas reais aos conteúdos matemáticos: "*Dessa forma, consideramos, com a Fase II, iniciada a convivência do aluno com situações problemas que envolvem o real as quais podem ser solucionadas com uso de recursos matemáticos*". (BELTRÃO e IGLIORI, 2010, p. 32-33).

Nessa fase, os alunos poderão conhecer aplicações do conteúdo na realidade, por meio da modelagem matemática. Assim, eles têm uma melhora no aprendizado do conteúdo, pois com o uso da modelagem, eles desenvolvem várias habilidades e cognições, como criatividade, pensamento lógico-matemático, capacidade de analisar estruturas matemáticas, além do interesse pela matéria que tem um aumento satisfatório. Dessa forma, eles dão um grande passo na aquisição da habilidade de construção de modelos matemáticos.

Na terceira fase, ocorrem todas as etapas do processo de modelagem, desde o reconhecimento do problema até a sua solução. Aqui, os alunos usam os modelos para expressar situações reais, e aplicam a matemática para a resolução da situação-problema. Os alunos, nessa fase, manipulam o conteúdo matemático, buscam modelos que se adequam ao conteúdo e aplicam esse modelo para a resolução. Esse processo de construção de modelos faz com que o aluno amplie seu conhecimento em matemática, aprimore sua criatividade e sua capacidade de pensamento e análise matemática, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico, que são características importantíssimas para um aprendizado eficaz no Cálculo Diferencial e Integral.

Podemos concluir que a modelagem matemática não atua somente no conteúdo matemático estudado na sala de aula. Ela vai além, busca desenvolver várias cognições e habilidades que vão contribuir para toda a vida do aluno, tanto no campo educacional como também fora dele.

O processo de modelagem, assim como o uso dos *softwares* em sala de aula, é um processo trabalhoso, que exige muita dedicação do profissional da educação e também dos alunos. Mesmo sendo trabalhosas, essas estratégias podem contribuir muito no aprendizado do aluno e na redução das dificuldades que atrapalham o rendimento nos cursos superiores que envolvem o conteúdo de cálculo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho, pudemos perceber que as dificuldades no cálculo existem e devem ser resolvidas e que a prática pedagógica pode ser adaptada para resolver essas questões. No ensino básico, ela deve ser voltada para evitar que os alunos saiam da escola sem o conhecimento necessário. No ensino superior, ela deve ser utilizada para recuperar os alunos que não conseguiram superar as dificuldades na escola e foram vítimas da defasagem, o que é um problema comum na educação brasileira.

Para que haja a melhora no ensino de Cálculo, os professores devem procurar maneiras, estratégias para que o ensino seja exitoso. Assim, o que mais está ao alcance dos profissionais da educação matemática é o uso do recurso tecnológico e da modelagem nas salas de aula, seja qual for o nível de ensino. Aliadas, essas duas estratégias poderão fazer com que o aluno desenvolva, de forma incomensurável, suas habilidades cognitivas, o seu pensamento lógico-matemático, sua capacidade de análise e, sobretudo sua criatividade, além de motivar o aluno no estudo da matemática. Assim, conseguiremos abrir a mente desses alunos para o Cálculo, que exige grande capacidade de pensamento ao ser estudado. Além disso, a modelagem matemática consegue aproximar o aluno das aplicações do conteúdo no mundo real, contribuindo assim para a sua motivação quanto ao estudo do cálculo.

Para que essas propostas possam ser aplicadas, o professor deve estar muito bem preparado. Ele deve sempre estudar as formas para facilitar o aprendizado de seus alunos. O tempo para isso é curto, porém essas estratégias devem ser encaixadas dentro do currículo de matemática para que elas, sempre que possível, estejam presentes nas aulas de matemática.

Se houver dedicação, preparação e vontade por parte de todos os envolvidos no processo de ensino, essas estratégias, sendo aplicadas corretamente, podem render bons frutos para o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Cabe a nós, professores de matemática ter dedicação e empenho e nos preparamos para conseguir modificar o ensino, melhorando-o cada vez mais.

Assim sendo, esperamos que este trabalho contribua para aqueles professores que se interessam pela melhora contínua no ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: O que é? Por quê? Como? Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004.

BELTRÃO, M. E. P. ; IGLIORI, S. B. C. Modelagem matemática e Aplicações: Abordagens para o ensino de funções. **Revista Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 01, p. 17-42, 2010.

BIEMBENGUT, M. S. ; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BORBA, M. C. e PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática **- Coleção Tendências em Educação Matemática. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.**

BOYER, Carl B. **História do Cálculo. Cálculo.** In: BOYER, Carl B. **Cálculo.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v.6).

______. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, L. M. L. **Uso de Ferramentas Educacionais na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Revista Tecnologias na Educação, Ano 1, nº 1, dezembro 2009. Disponível em:<http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/revista/a1n1/art14.pdf>. Acesso em: 06 Out. 2013.

COURANT, Richard. **O que é matemática?**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CYSNEIRO, P. G. **Novas tecnologias no cotidiano da escola**. Artigos categoria: informática. Disponível em: <http://www.educacaoonline.pro.br/art_as_novas_tecnologias.asp?f_id_artigo=422>. Acesso em: 06 out. 2013.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** Reflexões sobre educação e matemática. 4. ed. São Paulo: Summus, 1986.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática. 3.ed.** Campinas: UNICAMP, 2002.

FROTA, M. C. R. (2001). **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo.** In: LACHINI, J. ; LAUDARES, J. B. (Orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sobre o olhar dos professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p. 89-121.

GROENWALD, C. L. O. ; BECHER, E. L. **Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio.** In: Revista Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.12, n.2, p. 242-270, 2010.

LACHINI, J. (2000). **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo**. In: LACHINI, J. ; LAUDARES, J. B. (Orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sobre o olhar dos professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p. 146-188.

______. **O uso do computador no ensino de matemática na graduação.** In: LACHINI, J. ; LAUDARES, J. B. (Orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sobre o olhar dos professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p.68-87.

MARQUIS, J. **Erros comuns em álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). As ideias da álgebra. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 234-236.

MEYER, J. F. C. A.; SOUZA JR, A. J. . **A utilização do Computador no Processo de Ensinar-aprender Cálculo:** A Constituição de Grupos de Ensino com Pesquisa no Interior da Universidade. Zetetike (UNICAMP), FE-UNICAMP, v. 10, n.17/18, p. 113-142, 2002. Disponível em <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2509/2268>. Acesso em: 09 abril 2013.

NASSER, L. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG: SBEM, 2007. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../Artigo%20Lilian%20MR13.doc>. Acesso em 02 abril 2013.

REIS, F. da S. A. **Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos.** Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

SWOKOSWSKI, Earl Willian. **Cálculo com Geometria Analítica.** Trad. Alfredo Alves de Faria. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v.1.