UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO: SUPERFÍCIE DO CILINDRO INSCRITO EM UM CONE

Daniela Alves da Silveira Moura[1]

RESUMO

Este artigo abordará uma situação-problema, um modelo matemático que pode surgir no cotidiano de um engenheiro, um tecnólogo ou até mesmo em sala de aula. Busca mostrar que, por meio da Matemática, podem-se solucionar fenômenos ou acontecimentos do mundo físico utilizando conceitos básicos do Ensino Médio ou do Ensino Superior. O problema matemático *"Dado um cone qualquer e um cilindro inscrito neste mesmo cone, qual é a área máxima do cilindro em função desse cone?",* que é abordado neste estudo, a princípio, apresenta-se muito simples, porém se desvenda em situações e/ou condições bem complexas e interessantes, exigindo, inclusive, um maior aprofundamento. Acreditando na importância da investigação matemática e dos benefícios que uma pesquisa traz para a comunidade acadêmica e, consequentemente, para alunos e apreciadores da matemática, este artigo tem como objetivo discutir uma situação-problema buscando alternativas distintas, agregando conceitos do cálculo diferencial e do Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo e otimização.

ABSTRACT

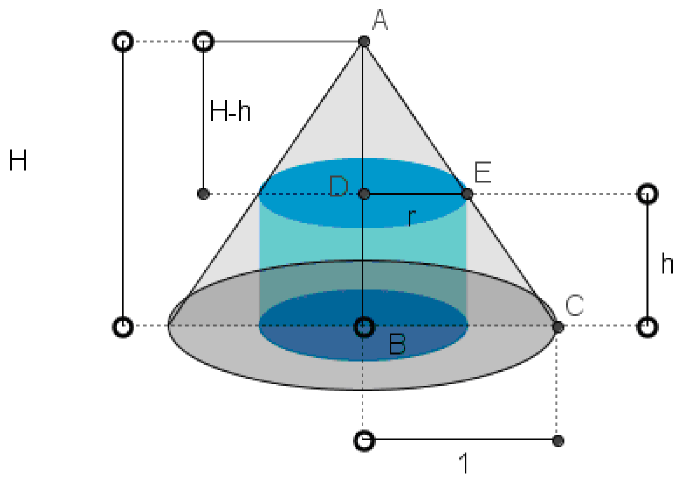
This article has been talk about a situation problem, a mathematical model , which can arise in the everyday engineer, technologist or even in the classroom . Show that through Maths can resolve events or phenomena of the physical world using basic high school or higher education concepts. The mathematical problem , "Given any cone and a cylinder inscribed in the same cone, which is the maximum area of the cylinder as a function of the cone ? " , Which is addressed in this study , the principle appears very simple , but is revealed in situations and or very complex and interesting conditions, including requiring greater analysis. Believing in the importance of mathematics research and the benefits that research brings to the academic community and thus for students and lovers of mathematics , this article aims to discuss a problem situation in order to separate

[1] Docente no Curso de Matemática da Faculdade de Pará de Minas- FAPAM. Especialista em Cálculo. E-mail: danisilmoura@yahoo.com.br

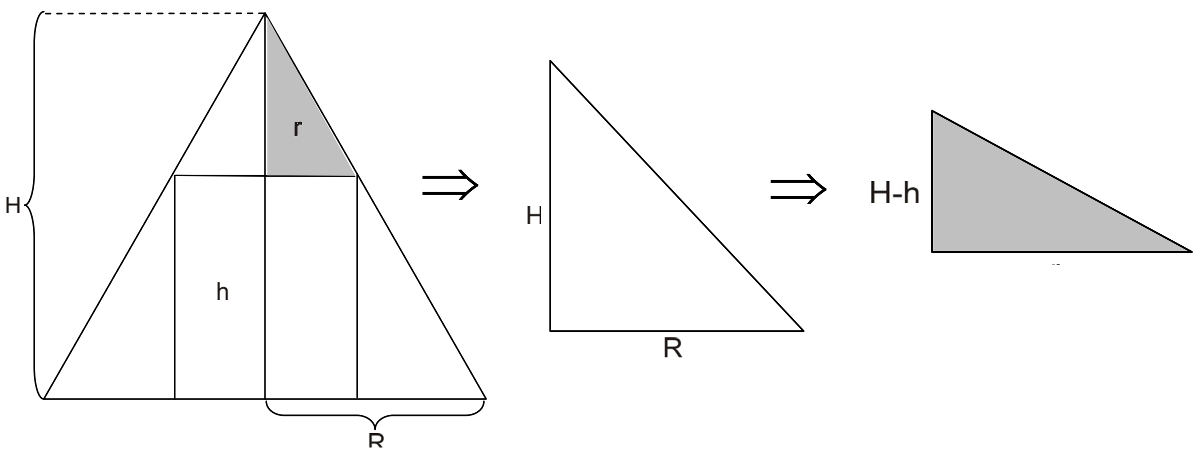
alternatives , adding concepts of differential calculus and high school. .

KEYWORDS : calculation and optimization.

QUAL É A ÁREA MÁXIMA DO CILINDRO EM FUNÇÃO DO CONE?



Considerando o raio do cone fixo igual a 1, a altura do cone H, queremos determinar as possíveis dimensões do cilindro raio (r) e altura (h), para que o cilindro tenha área máxima em função do cone.



$$\frac{H}{H-h}=\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} H-h&=Hr \\ -h&=Hr-H \\ h&=H(1-r) \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da área do cilindro:

$$S(r)=2\pi rH(1-r)+2\pi r^2$$

$$S(r)=2\pi rH-2\pi r^2H+2\pi r^2$$

Determinado os pontos críticos:

$$S(r)=2\pi rH-2\pi r^2H+2\pi r^2 \quad \div 2\pi$$

$$S(r)=rH-r^2H+r^2$$

Derivando em função de r:

$$S'(r)=H-2Hr+2r$$

$$S'(r)=0$$

$$H-2Hr+2r=0$$

$$-2Hr+2r=-H$$

$$r(-2H+2)=-H$$

$$r=\frac{-H}{2-2H}$$

Encontramos r em função H.

Retomando a área em função de r, $S(r)=2\pi rH-2\pi r^2H+2\pi r^2$, temos uma equação do segundo grau e, dividindo por 2π, temos:

$$S(r)=rH-r^2H+r^2$$

$S(r)=rH+r^2(1-H)$, onde o coeficiente $a=(1-H)$ e $b=H$.

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$rH+r^2(1-H)=0$$

$r=0$ ou

$$H+r(1-H)=0$$

$$r=\frac{-H}{1-H}$$

Temos então cinco condições:

i. $H<1$

ii. $H=1$

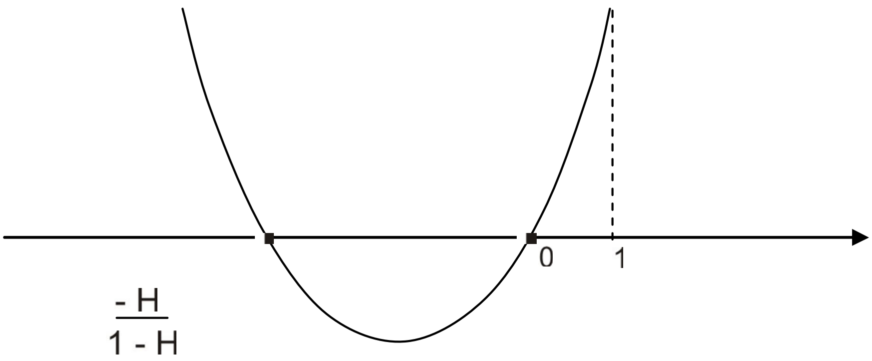
iii. $1<H<2$

iv. $H = 2$

v. $H > 2$

Analisando o primeiro caso, $H < 1$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, cujas raízes são:

$r = 0$ e $r = \dfrac{-H}{1-H}$



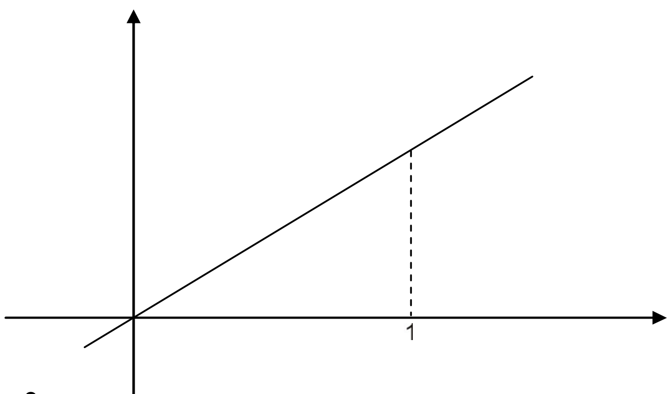
Ness

Na segunda situação, se $H = 1$, não teremos equação do segundo grau, mas um crescimento linear com velocidade constante. Nesse caso, há máximo, porém o cilindro está degenerado nesse ponto.

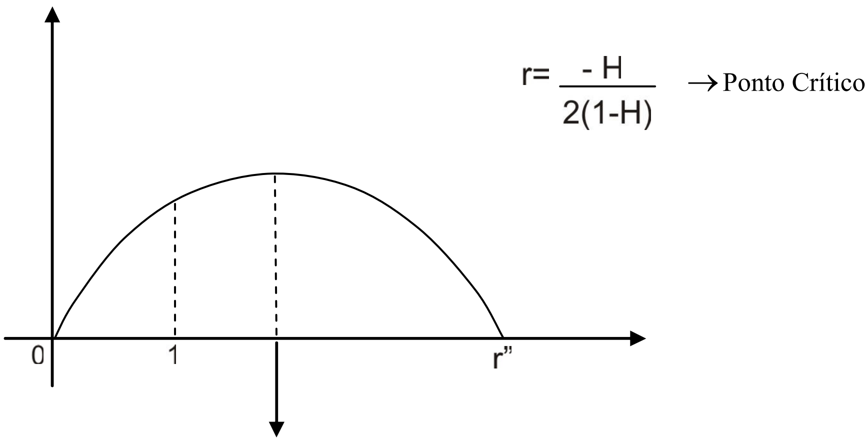
$rH + r^2(1-H) = 0$

Se $H = 1$, temos: $rH + r^2(1-1) = 0$

Logo $rH = 0$, então $r = 0$.



Se $1 < H < 2$, temos uma equação do segundo grau com concavidade voltada para baixo, cujas raízes são: $r = 0$ e $r = \dfrac{-H}{1-H}$

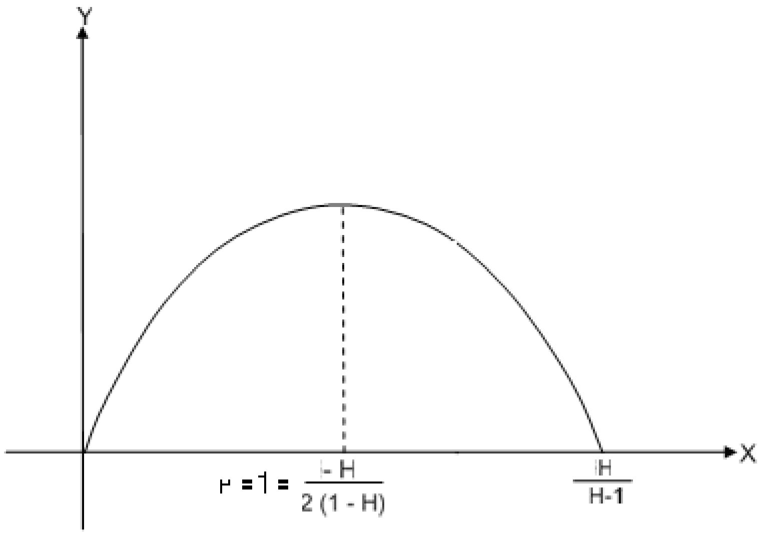


Podemos perce[...] segunda raiz do gráfico e sabemos que $r = \frac{H}{H-1}$. Como $1 < H < 2$, o ponto m[...]ertencer ao intervalo aberto $[0,1]$; logo, nesse caso, também não há máximo. Sendo assim, não teríamos um cilindro inscrito, pois suas dimensões estariam ultrapassando as dimensões do cone.

Notamos também que a área da base cresce mais rápido que a área lateral.

Se $H = 2$, temos uma equação do segundo grau com coeficiente $a = (1 - H) = (1 - 2) = -1$, negativo, ou seja, temos concavidade voltada para baixo.

As raízes são: $r = 0$ e $r = \frac{-H}{1-H}$

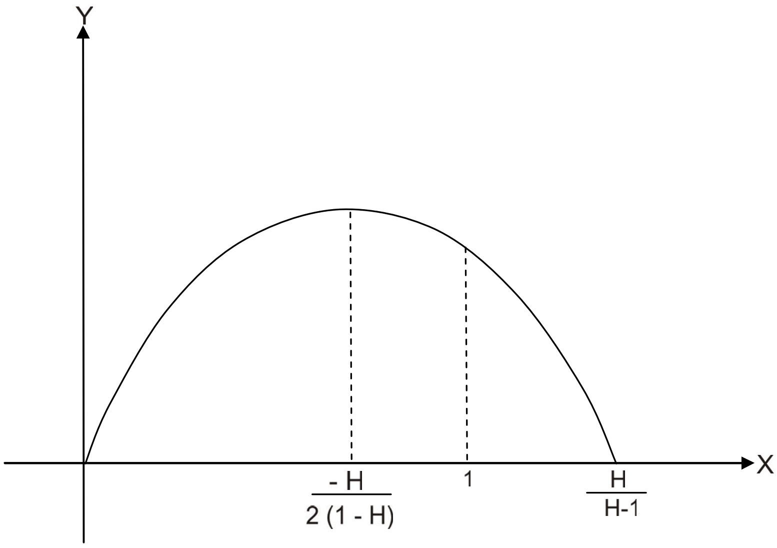


Desse modo, teríamos como ponto máximo $r=1$, que é ponto médio das raízes $r=0$ e $r=\frac{H}{H-1}$, ou seja, $1 = r = \frac{H}{2(H-1)}$, mas se $r=1$, o cilindro estaria degenerado, pois teríamos $h=0$ e, portanto, seria somente um disco.

Se $H>2$, temos uma equação do segundo grau com concavidade voltada para baixo, cujas raízes são:

$r=0$ e $r=\frac{-H}{1-H}$

Verificando o gráfico abaixo:



É fácil p onto máximo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos, neste artigo, uma pequena discussão sobre problema de otimização. Com este trabalho, pode-se ter um novo olhar, uma nova perspectiva do cálculo, em especial sobre os problemas de máximos e mínimos tão discutidos no Ensino Médio e no Ensino Superior.

Contudo, espera-se que este estudo possa inspirar e contribuir para a comunidade acadêmica ou até mesmo instigar colegas e apreciadores da matemática.

REFERÊNCIAS

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, 2ª Edição. Makron Books (1994)

STEWART, James. **Cálculo**, Volume 1, 4ª Edição. Pioneira (2001)

MALTA, Iaci, PESCO, Sinésio, LOPES, Hélio. **Cálculo a uma variável**, Volume 1, 2ª Edição. Puc- Rio (2002)

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, McGraw-Hill (1987)

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, 2ª Edição. Harbra (1981)

PAIVA, Manoel R. **Matemática**, Volume 3. Moderna (1995)